Exercice 1 : (2010 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points A(-1,0, 3), B(3, 0, 0) et C(7, 1, − 3) et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+4\vec{k}$ et en déduire que : $3x+4z-9=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Montrer que (S) est la sphère de centre Ω(3, 1,0) et de rayon 5

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} x=3+3t \\ y=1 \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=4t \end{cases}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points E(6, 1, 4) et F(0, 1, – 4)

Exercice 2 : (2010 S1) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $z^2-6z+10=0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=3-i$, $b=3+i$; $c=7-3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z′ l'affixe du point M′ image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z'=iz+2-4i$

b) Vérifier que : l'affixe du point C′ l'image du point C par la rotation R est : $c'=5+3i$

c) Montrer que : $\frac{c'-b}{c-b}=\frac{1}{2}i$ puis en déduire que le triangle BCC′ est rectangle en B et $BC=2BC'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).
On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A″ Obtenir une seule boule rouge″

B ″ Obtenir une boule blanche au moins ″

Montrer que $P(A)=\frac{1}{2}$ et $P(B)=\frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $P(X=0)=\frac{1}{6}$ et $P(X=2)=\frac{3}{10}$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 : (2010 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3U_n-1}{2U_n} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0=2$$

1) Montrer que : $U_n-1>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $V_n=\frac{U_n-1}{2U_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

b – Montrer que : $U_n=\frac{V_n-1}{2V_n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n=1$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$W_n=\ln U_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Problème : (2010 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur ℝ par :

$g(x)=1+4xe^{2x}$

1) Montrer que $g'(x)=4(2x+1)e^{2x} \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2})=1-\frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2})>0$

b) En déduire que $g(x)>0$ pour tout x de R.

II) On considère la fonction f définie sur ℝ par

$f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

(C$_f$) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a – Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis montrer que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ (on rappelle que $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$)

2) Montrer que : $f'(x)=g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur R

3) a) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de +∞ de direction l'axe des ordonnées

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x+1$ est asymptote à **(C)** au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

4) a) Montrer que y = x une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée)

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

6) a) montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites x = 0 et $x=\frac{1}{2}$ est$(6-2e)cm^2$